

Dowody założeniowe – konspekt

Tworząc dowód założeniowy wykazujemy tautologiczność twierdzenia nie za pomocą tabelk prawdziwościowych, jak to jest w przypadku sprawdzania tautologiczności formuł metodą zerojedynkową skróconą, lecz za pomocą zestawu reguł i praw KRZ. Poniżej: lista tych reguł i praw:

Reguły Pierwotne KRZ

Dołączanie koniunkcji (DK)

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \hline \alpha \wedge \beta \end{array}$$

Dołączanie alternatywy (DA)

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha \vee \beta \end{array}$$

Dołączanie równoważności (DR)

$$\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow \alpha \\ \hline \alpha \leftrightarrow \beta \end{array}$$

Dołączanie negacji (DN)

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \neg \neg \alpha \end{array}$$

Opuszczanie koniunkcji (OK)

$$\begin{array}{cc} \alpha \wedge \beta & \alpha \wedge \beta \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$$

Opuszczanie alternatywy (OA)

$$\begin{array}{cc} \alpha \vee \beta & \alpha \vee \beta \\ \neg \alpha & \neg \beta \\ \hline \beta & \alpha \end{array}$$

Opuszczanie równoważności (OR)

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

Opuszczanie negacji (ON)

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

Prawa KRZ

Reguła odrywania (Modus Ponendo Ponens) (RO, MPP)

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$

Modus Tollendo Tollens (MTT)

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha}$$

Negacja koniunkcji (NK) (jest to jedno z praw de Morgana)

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$$

Negacja alternatywy (NA) (jest to jedno z praw de Morgana)

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

Negacja implikacji (NI)

$$\frac{\neg(\alpha \rightarrow \beta)}{\alpha \wedge \neg\beta}$$

Negacja równoważności (NR)

$$\frac{\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)}{\alpha \leftrightarrow \neg\beta} \quad \frac{\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)}{\neg\alpha \leftrightarrow \beta}$$

Przechodniość implikacji (PI)

$$\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow \delta \end{array}$$

$$\overline{\alpha \rightarrow \delta}$$

Transpozycja prosta (TP)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

$$\overline{\neg \beta \rightarrow \neg \alpha}$$

Zamiana poprzedników implikacji (ZPI)

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$$

$$\overline{\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)}$$

Zastępowanie implikacji alternatywą (ZIA)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

$$\overline{\neg \alpha \vee \beta}$$

Zastępowanie implikacji koniunkcją (ZIK)

$$\alpha \rightarrow \beta$$

$$\overline{\neg(\alpha \wedge \neg \beta)}$$

Prawo dodawania poprzedników implikacji (PDPI)

$$\alpha \rightarrow \delta$$

$$\beta \rightarrow \delta$$

$$\overline{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \delta}$$

By zastosować te reguły i prawa musimy popatrzeć na badane twierdzenie jako na ciąg implikacji:

$$\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta))))$$

Gdzie poszczególne alfy to nasze założenia, beta zaś to następnik ostatniej implikacji.

Dokonując dowodu metodą wprost musimy wpisać w kolejne wiersze wszystkie założenia i za pomocą reguł i praw wyprowadzić z nich betę.

Dokonując dowodu metodą nie wprost musimy wpisać w kolejne wiersze wszystkie założenia a także zanegowaną betę – założenie dowodu nie wprost. Następnie wykazujemy sprzeczność.

Przykładowe zadania.

Dowód wprost:

$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p))$

- | | | |
|----|-------------------------------------|-----------|
| 1. | $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ | zał |
| 2. | q | zał. |
| 3. | $\neg r$ | zał. |
| 4. | $(q \rightarrow (p \rightarrow r))$ | ZPI: 1 |
| 5. | $p \rightarrow r$ | RO: 4 |
| 6. | $\neg p$ | MTT: 5,3. |

Dowód nie wprost tego samego twierdzenia:

- | | | |
|----|-------------------------------------|---------------------------|
| 1. | $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ | zał |
| 2. | q | zał. |
| 3. | $\neg r$ | zał. |
| 4. | $\neg \neg p$ | zdnw |
| 5. | p | ON:4 |
| 6. | $q \rightarrow r$ | RO: 1,5 |
| 7. | r | RO: 6,2. Sprzeczność 6,2. |